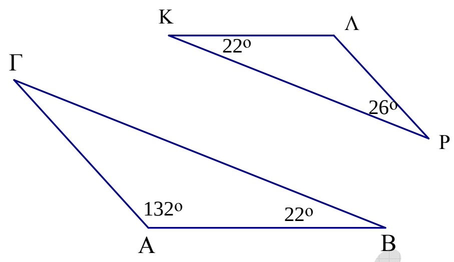
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 3$^{\eta}$ ΔΕΚΑΔΑ

21.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια
β) Να γράψετε την αναλογία των ομολόγων πλευρών
γ) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας

Προτεινόμενη λύση

α)
Δεδομένου ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^o με βάση τα δεδομένα είναι
$\hat{\Gamma} = 180^o - (132^o + 22^o) = 26^o$ και $\hat{\Lambda} = 180^o - (22^o + 26^o) = 132^o$
Οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια αφού οι γωνίες τους είναι ίσες

β)
Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.
Επομένως η αναλογία των ομολόγων πλευρών είναι η $\dfrac{AB}{K\Lambda} = \dfrac{A\Gamma}{P\Lambda} = \dfrac{B\Gamma}{KP}$

γ)
Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με $\lambda = \dfrac{AB}{K\Lambda}$

22.

Να αποδείξετε ότι

α) $(3\eta\mu x + 4\,\sigma\upsilon\nu\, x)^2 + (4\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)^2 = 25$ **β)** $\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

Προτεινόμενη λύση

α)
1^o μέλος $= (3\eta\mu x + 4\,\sigma\upsilon\nu\, x)^2 + (4\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)^2 =$
$= 9\eta\mu^2 x + 24\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + 16\sigma\upsilon\nu^2 x + 16\eta\mu^2 x - 24\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + 9\sigma\upsilon\nu^2 x =$
$= 25\eta\mu^2 x + 25\sigma\upsilon\nu^2 x =$
$= 25(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) =$
$= 25\cdot 1 = 25$

β)
$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$
Πολλαπλασιάζουμε «χιαστί» με την προϋπόθεση ότι $\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x) \neq 0$
Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\eta\mu^2 x = (1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)$
$\eta\mu^2 x = 1-\sigma\upsilon\nu^2 x$ πράγμα το οποίο ισχύει

23.

Να αποδείξετε ότι

α) $(x + 3)^2 - 2 = (x + 1)^2 + 2(2x + 3)$

β) $(x - 1)^2 + x(3x - 7) = x(4x - 9) - 1$

γ) $(\alpha + \beta + 1)^2 = (\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta) + 1$

Προτεινόμενη λύση

α)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(x + 3)^2 - 2 = (x + 1)^2 + 2(2x + 3)$

$x^2 + 6x + 9 - 2 = x^2 + 2x + 1 + 4x + 6$

$x^2 + 6x + 7 = x^2 + 6x + 7$ η οποία είναι προφανής

β)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(x - 1)^2 + x(3x - 7) = x(4x - 9) - 1$

$x^2 - 2x + 1 + 3x^2 - 7x = 4x^2 - 9x - 1$

$4x^2 - 9x - 1 = 4x^2 - 9x - 1$ η οποία είναι προφανής

γ)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(\alpha + \beta + 1)^2 = (\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta) + 1$

$\alpha^2 + \beta^2 + 1 + 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha + 2\beta + 1$

η οποία είναι προφανής

24.

Να γίνουν οι πράξεις

α) $\dfrac{1 - 4x + 4x^2}{x^2 - 4} : \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ **β)** $\dfrac{2\alpha + 3\beta}{\alpha - \beta} \cdot \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{9\beta^2 - 4\alpha^2}$ **γ)** $\dfrac{6}{\alpha + \beta} : \dfrac{3\alpha - 9\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta - 3\beta^2}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{1 - 4x + 4x^2}{x^2 - 4} : \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{(1 - 2x)^2}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{2x - 1}$$

$$= \frac{(1 - 2x)^2 (x - 2)}{(x - 2)(x + 2)(2x - 1)} =$$

$$= \frac{(2x - 1)^{\cancel{2}} \cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}(x + 2)\cancel{(2x - 1)}} = \frac{2x - 1}{x + 2}$$

β)

$$\frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{9\beta^2 - 4\alpha^2} = \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{(3\beta - 2\alpha)(3\beta + 2\alpha)} =$$

$$= \frac{(2\alpha + 3\beta)(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{(\alpha - \beta)(3\beta - 2\alpha)(3\beta + 2\alpha)} =$$

$$= \frac{-\cancel{(2\alpha + 3\beta)}\cancel{(\alpha - \beta)}(\beta + \alpha)}{\cancel{(\alpha - \beta)}(3\beta - 2\alpha)\cancel{(3\beta + 2\alpha)}} = \frac{-(\alpha + \beta)}{3\beta - 2\alpha}$$

γ)

$$\frac{6}{\alpha + \beta} : \frac{3\alpha - 9\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta - 3\beta^2} = \frac{6}{\alpha + \beta} : \frac{3(\alpha - 3\beta)}{\alpha^2 - 3\alpha\beta + \alpha\beta - 3\beta^2} =$$

$$= \frac{6}{\alpha + \beta} : \frac{3(\alpha - 3\beta)}{\alpha(\alpha - 3\beta) + \beta(\alpha - 3\beta)} =$$

$$= \frac{6}{\alpha+\beta} : \frac{3(\alpha-3\beta)}{(\alpha-3\beta)(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{6}{\alpha+\beta} \cdot \frac{(\alpha-3\beta)(\alpha+\beta)}{3(\alpha-3\beta)} =$$
$$= \frac{6(\alpha-3\beta)(\alpha+\beta)}{3(\alpha-3\beta)(\alpha+\beta)} = 2$$

25.

Αν για μία αμβλεία γωνία ω είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2\eta\mu\omega + 3\sqrt{7}\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{7}\sigma\upsilon\nu\omega}$

Προτεινόμενη λύση

Από τον τύπο $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε $\eta\mu^2\omega + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1$

$$\eta\mu^2\omega + \frac{7}{16} = 1$$
$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$
$$\eta\mu\omega = \pm\frac{3}{4}$$

και επειδή ημω > 0 δεκτή τιμή η $\eta\mu\omega = \frac{3}{4}$

Επίσης $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{-\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

Επομένως $A = \frac{2\cdot\frac{3}{4} + 3\sqrt{7}\left(\frac{-3}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}\left(\frac{-\sqrt{7}}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{2} - 9}{\frac{-7}{4}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{18}{2}}{\frac{-7}{4}} = \frac{-\frac{15}{2}}{\frac{-7}{4}} = \frac{30}{7}$

26.

Αν $\alpha = \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}}$ και $\beta = \dfrac{3}{4-\sqrt{14}} + \dfrac{3}{4+\sqrt{14}}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha = \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})} =$$
$$= \sqrt{49-4(\sqrt{6})^2} =$$
$$= \sqrt{49-24} = \sqrt{25} = 5$$

$$\beta = \frac{3}{4-\sqrt{14}} + \frac{3}{4+\sqrt{14}} = \frac{3(4+\sqrt{14})}{(4-\sqrt{14})(4+\sqrt{14})} + \frac{3(4-\sqrt{14})}{(4-\sqrt{14})(4+\sqrt{14})} =$$
$$= \frac{3(4+\sqrt{14})}{16-14} + \frac{3(4-\sqrt{14})}{16-14} = \frac{12+3\sqrt{14}+12-3\sqrt{14}}{2} = 12$$

Οπότε $\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 5 + 12 + \sqrt{25+144} = 17 + \sqrt{169} = 17 + 13 = 30$

27.

Έστω τα πολυώνυμα $A = x(x+3)$ και $B = (x+1)(x+2)$

α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A+1)^2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $(A+1)^2 - 1 = B - 2$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$B = (x+1)(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 =$$
$$= x^2 + 3x + 2 =$$
$$= x(x+3) + 2 = A + 2$$

$AB + 1 = A(A+2)^* + 1 = A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2$

* $B = A + 2$

β)

$(A+1)^2 - 1 = B - 2$ άρα (με βάση το (α)) $AB + 1 - 1 = A + 2 - 2$

$AB - A = 0$

$A(B-1) = 0$

$A = 0$ ή $B = 1$

- Όταν $A = 0$, θα έχουμε $x(x+3) = 0$ οπότε $x = 0$ ή $x = -3$
- Όταν $B = 1$, θα έχουμε $(x+1)(x+2) = 1$ οπότε $x^2 + 2x + x + 2 = 1$
  $x^2 + 3x + 1 = 0$

με διακρίνουσα $\Delta = \sqrt{5}$ και ρίζες $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

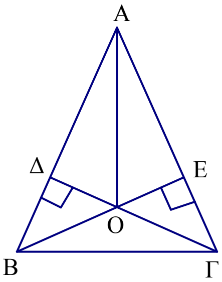
28.

Τα ύψη ΒΕ και ΓΔ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) τέμνονται στο Ο.
Να αποδείξετε ότι :

α) ΒΕ = ΓΔ

β) Η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$

γ) Το Ο ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ.



Προτεινόμενη λύση

α)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι ίσα, αφού ΑΒ = ΑΓ και η γωνία $\widehat{A}$ είναι κοινή. Οπότε ΒΕ = ΓΔ

β)

Από την ισότητα των προηγούμενων τριγώνων προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ.
Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΟ και ΑΟΕ είναι ίσα , δεδομένου ότι έχουν και την ΑΟ κοινή.

Άρα $\Delta\widehat{A}O = O\widehat{A}E$, επομένως η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

γ)

Επειδή το Ο είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{A}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας , δηλαδή από τις ΑΒ και ΑΓ.

29.

Να αποδείξετε ότι

α) $2\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{18} = 0$ **β)** $\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{63}}{\sqrt{700}} = -\dfrac{1}{10}$

γ) $(\sqrt{180} + \sqrt{125})\sqrt{20} = 110$ **δ)** $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} = -3$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}2\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{18} &= 2\sqrt{4\cdot 2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2\cdot 9} = \\ &= 2\sqrt{4}\,\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{9}\,\sqrt{2} = \\ &= 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{28}-\sqrt{63}}{\sqrt{700}} = \frac{\sqrt{4\cdot 7}-\sqrt{7\cdot 9}}{\sqrt{7\cdot 100}} &= \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{100}\sqrt{7}} = \\ &= \frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{7}}{10\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{7}}{10\sqrt{7}} = -\frac{1}{10}\end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned}(\sqrt{180} + \sqrt{125})\sqrt{20} &= (\sqrt{180} + \sqrt{125})\sqrt{20} = \\ &= (\sqrt{36\cdot 5} + \sqrt{25\cdot 5})\sqrt{4\cdot 5} = \\ &= (\sqrt{36}\cdot\sqrt{5} + \sqrt{25}\cdot\sqrt{5})\sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = \\ &= (6\sqrt{5} + 5\sqrt{5})\cdot 2\sqrt{5} \\ &= 11\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 22(\sqrt{5})^2 = 22\cdot 5 = 110\end{aligned}$$

δ)

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2-2^2}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}=$$

$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-2=-3$$

30.

i) Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις

$\alpha = x^2 + 4x + 3$, $\beta = x^2 + 2x - 3$, $\gamma = x^2 - 1$

ii) Να βρείτε το ΕΚΠ των α , β και γ

iii) Να γίνουν οι πράξεις $\dfrac{1}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+2x-3}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha = x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

$\beta = x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

$\gamma = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

ii)

ΕΚΠ(α , β , γ) = $(x + 3)(x + 1)(x - 1)$

iii)

$$\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+2x-3}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x+3)}=$$

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x+3)(x-1)}+\frac{x+3}{(x+1)(x+3)(x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(x+3)(x-1)}=$$

$$=\frac{x-1+x+3+x+1}{(x+1)(x+3)(x-1)}=\frac{3x+3}{(x+1)(x+3)(x-1)}=$$

$$=\frac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+3)(x-1)}=\frac{3}{(x+3)(x-1)}$$